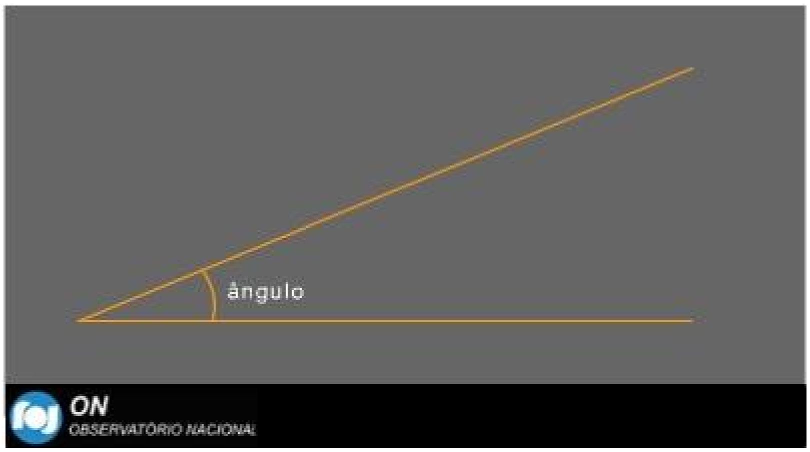
# Ângulos e medições angulares

Os astrônomos usam ângulos e sistemas de medições angulares para representar as posições e tamanhos aparentes de objetos no céu.

## Ângulo plano

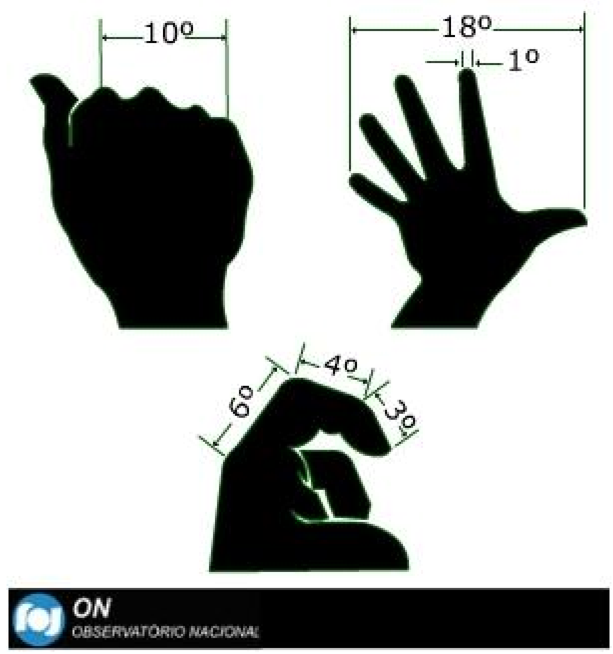
Um **ângulo plano** é a abertura formada por duas semi-retas que se encontram em um ponto.




Uma medida angular descreve exatamente a forma, ou tamanho, de um ângulo. A unidade básica de medida angular é o **grau** designado pelo símbolo °.

Uma circunferência inteira é dividida em 360° e um ângulo reto mede 90°.

Os astrônomos usam medições angulares para descrever o tamanho aparente dos objetos celestes. Por exemplo, imagine-se olhando para a Lua Cheia. O ângulo coberto pelo diâmetro da Lua é aproximadamente (1/2)°. Dizemos por conseguinte que o diâmetro angular, ou tamanho angular, da Lua é de "meio grau". Alternativamente os astrônomos dizem que a Lua *subtende* um ângulo de (1/2)° ou "meio grau".



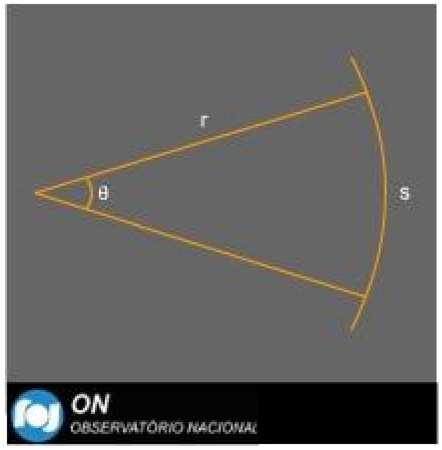

Mantendo o braço estendido, um adulto pode obter uma estimativa grosseira de valores angulares usando partes de sua mão, como mostra a figura ao lado. Por exemplo, ao fecharmos nossa mão, mantendo o braço estendido, o punho cobre um ângulo de cerca de 10°. Se mantivermos a mão aberta na direção do céu enquanto o braço está estendido, a ponta de seu dedo estará medindo um ângulo com cerca de 1° de largura. Vários segmentos de nosso dedo indicador, estendido no comprimento de um braço, podem ser similarmente usados para estimar ângulos com alguns graus de abertura.

Para falar sobre ângulos menores subdividimos o grau em 60 minutos de arco, ou abreviadamente 60'. Um minuto de arco é subdividido mais ainda em 60 segundos de arco ou abreviadamente 60".

Uma outra unidade usada para medidas de ângulos é o **radiano**, abreviado como **rd**. Um ângulo é dado em radianos a partir da relação

$$\theta = s/r$$

onde θ é o ângulo medido em radianos e *s* é o comprimento do arco subtendido por esse ângulo sobre uma circunferência de raio *r*.




Por ser uma medida obtida a partir da razão entre dois comprimentos (o comprimento do arco e o raio), o radiano é um número puro, não tendo dimensão física.

Como o comprimento de uma circunferência de raio *r* é $2\pi r$, vemos que uma circunferência completa subtende um ângulo de $2\pi$ radianos (uma vez que o ângulo total em radianos será dado pelo comprimento total da circunferência dividido pelo seu raio ou seja, $2\pi r/r$ que é igual a $2\pi$).

Vemos, portanto, que

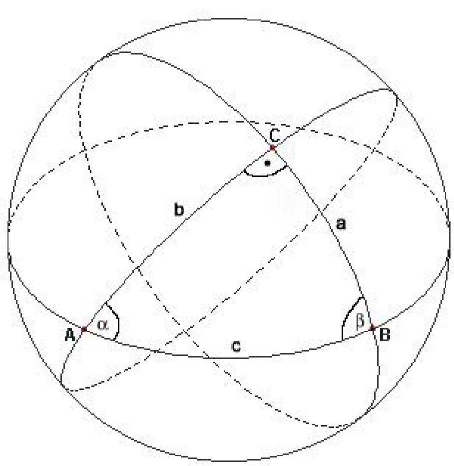
| | grau | minuto | segundo | radiano |
|---|---|---|---|---|
| **grau** | 1 | 60 | 3600 | $1,745 \times 10^{-2}$ |
| **minuto** | $1,667 \times 10^{-2}$ | 1 | 60 | $2,909 \times 10^{-4}$ |
| **segundo** | $2,778 \times 10^{-4}$ | $1,667 \times 10^{-2}$ | 1 | $4,848 \times 10^{-6}$ |
| **radiano** | 57,30 | 3438 | $2,063 \times 10^{5}$ | 1 |

| Exercício |
|---|
| Podemos definir ângulos sobre superfícies curvas? |

**Resposta:**

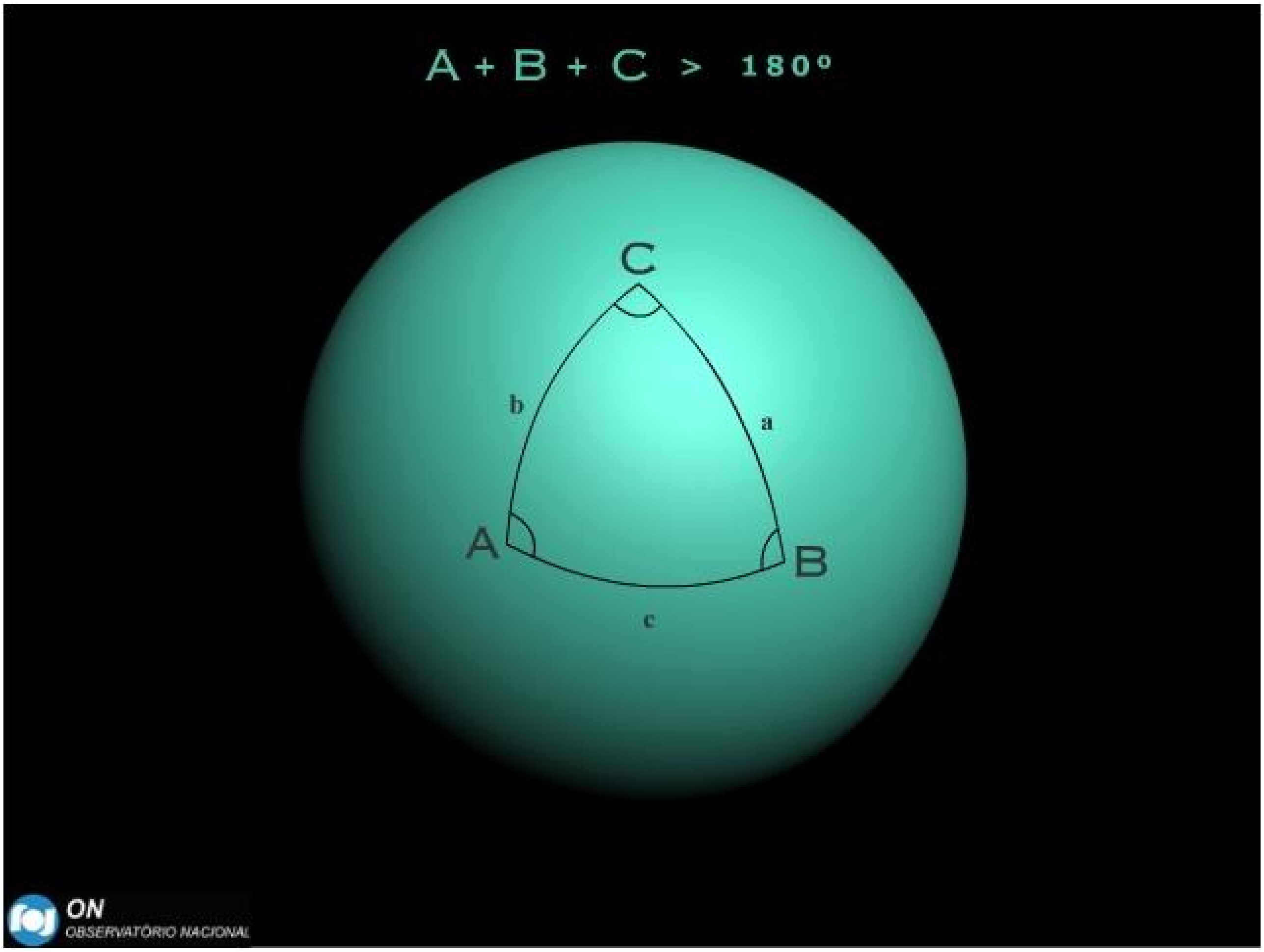
Podemos sim. Os triângulos definidos em uma superfície plana, assim como as relações existentes entre seus ângulos, são estudados pela parte da matemática chamada de **trigonometria plana**. No entanto, triângulos também podem ser definidos sobre a superfície de uma esfera. Nesse caso o seu estudo, assim como das relações existente entre seus ângulos, fazem parte do domínio da **trigonometria esférica**.

Na geometria definida em um plano a menor distância entre dois pontos é uma linha reta. Entretanto, não podemos definir uma linha reta na superfície de uma esfera. Sobre ela definimos grandes círculos ou seja, círculos cujo centro coincide com o centro da esfera, como mostra a figura abaixo. Os grandes círculos possuem o mesmo raio que a esfera e cada um deles cobre a menor distância entre dois pontos situados na superfície da esfera..



Na figura acima o triângulo esférico ABC está traçado sobre a esfera. Note que as linhas traçadas sobre a superfície da esfera e que formam os lados do triângulo são "grandes círculos". As letras maiúsculas, A, B e C, representam os ângulos entre os arcos dos grandes círculos do triângulo esférico, medidos na superfície da esfera. As letras minúsculas, a, b e c, representam os comprimentos dos arcos de grandes círculos medidos como ângulos a partir do centro da esfera.

Quando trabalhamos com a **trigonometria esférica** temos que abandonar algumas relações bem conhecidas da chamada trigonometria plana. Por exemplo, a trigonometria plana nos diz que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. No caso da trigonometria esférica isso não é mais válido e a soma dos ângulos internos de um triângulo é superior a 180º.




Abaixo mostramos de que maneira a trigonometria esférica relaciona os lados do triângulo esférico e seus ângulos internos. A chamada "regra dos cosenos" para um triângulo esférico é:

Cos(a) = Cos(b) × Cos(c) + Sen(b) × Sen(c) × Cos(A)

Cos(b) = Cos(a) × Cos(c) + Sen(a) × Sen(c) × Cos(B)

Cos(c) = Cos(b) × Cos(a) + Sen(b) × Sen(a) × Cos(C)

A regra do coseno permite-nos avaliar o comprimento de um dos arcos de um triângulo esférico se os outros dois arcos e o ângulo oposto a ele forem conhecidos.

Existe também uma "regra do seno" para triângulos esféricos. Ela é:

Sen(a) / Sen(A) = Sen(b) / Sen(B) = Sen(c) / Sen(C)

A regra do seno pode ser usada para encontrar um ângulo se dois lados e um ângulo são conhecidos. Ela também serve para encontrar um lado se dois ângulos e um lado são conhecidos.

A trigonometria esférica é muito importante na astronomia e na navegação. Ela é muito utilizada nos cálculos realizados quando estudamos a chamada **astronomia de posição**. Ao estudar alguns fenômenos astronômicos, tais como a precessão, nutação, etc, os astrônomos precisam da trigonometria esférica para a realização de seus cálculos uma vez que a geometria agora é traçada sobre a **esfera** celeste.

## Ângulo sólido

O ângulo sólido é o análogo tridimensional de um ângulo ordinário. O ângulo plano é determinado quando duas semi-retas se encontram em um vértice. No caso do ângulo sólido ele será determinado por uma figura tridimensional que tem sua origem também em um ponto.

Podemos definir o ângulo sólido como sendo aquele que, visto do centro de uma esfera, inclui uma dada área sobre a superfície dessa esfera.

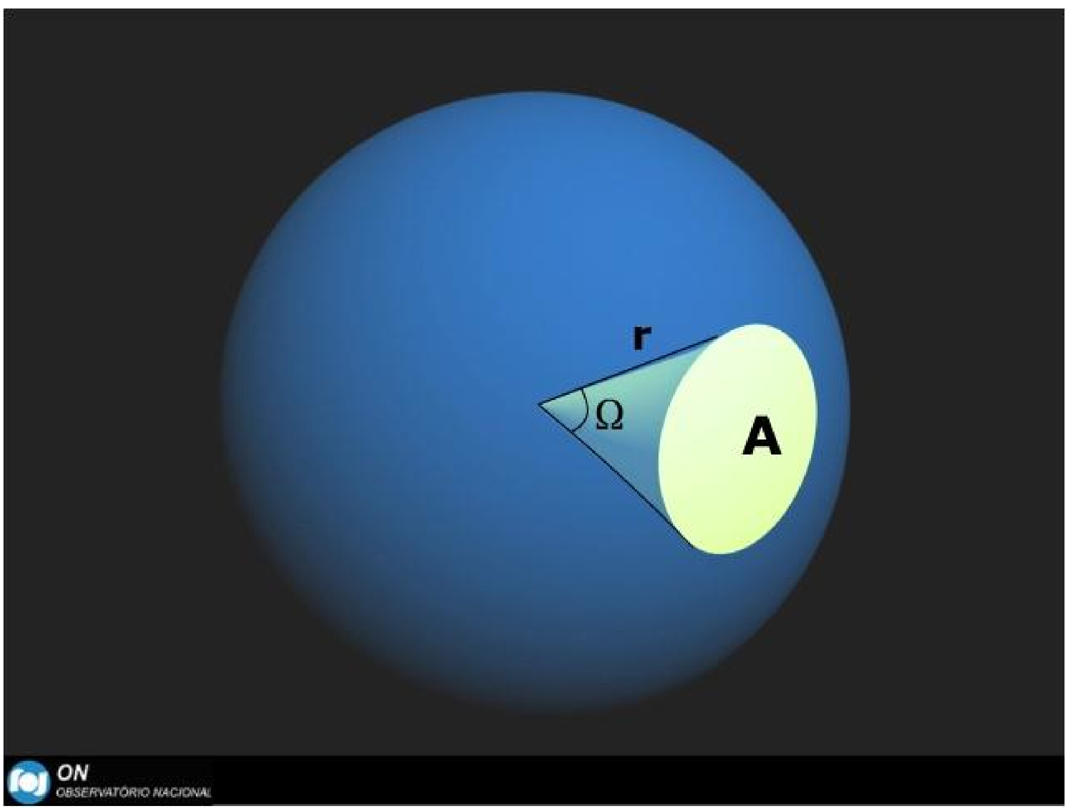
A unidade de medida de um ângulo sólido é o **esferorradiano**, que é equivalente ao radiano elevado ao quadrado.
Ângulos sólidos também podem ser medidos em graus elevados ao quadrado.

Vamos ver como calculamos o ângulo sólido que um determinado objeto subtende em um ponto externo a ele e que chamaremos de P. Para isso escolha um outro ponto de tal forma que o objeto esteja entre ele e o ponto P. A partir desse novo ponto faça a projeção da área do objeto sobre o ponto P. Com isso você obteve um objeto tridimensional que possui um vértice no novo ponto escolhido e que tem como base a área projetada na região onde está o ponto P. Imagine agora que uma esfera está passando pelo ponto P e que a área do objeto projetada em P faz parte da superfície da esfera. Se você dividir a área dessa superfície projetada sobre a esfera (contida dentro da figura que marca os limites mais externos do objeto) pela área total da esfera, que equivale a $4\pi r^2$, irá obter o que chamamos de *área fracionária*.
Para obter o ângulo sólido que o objeto subtende no ponto P, em esferorradianos (ou radiano elevado ao quadrado), basta multiplicar a área fracionária por $4\pi$.
Para obter esse mesmo ângulo sólido em graus elevados ao quadrado, multiplique a área fracionária por $4 \times 180^2/\pi$, que é equivalente a $129600/\pi$.

É claro que você já notou que para calcular o ângulo sólido que um objeto subtende em um ponto P qualquer basta calcular o tamanho da área projetada pelo objeto sobre uma esfera que passa pelo ponto P e dividir esse valor pelo quadrado do raio dessa esfera.
Assim, o ângulo sólido é dado por

$$\Omega = A/r^2$$

onde $\Omega$ é o ângulo sólido visto por um objeto e A é a sua área projetada sobre a superfície de uma esfera de raio r.




É interessante notar que a forma da área projetada sobre a esfera não é importante para o cálculo do ângulo sólido. Essa projeção pode ter qualquer forma. Se projeções diferentes definem o mesmo valor de área, sobre uma esfera com o mesmo valor de raio, o ângulo sólido correspondente terá o mesmo valor.

$$1 \text{ esfera} = 4\pi \text{ esferorradianos} = 12{,}57 \text{ esferorradianos}$$